Kapitel 2

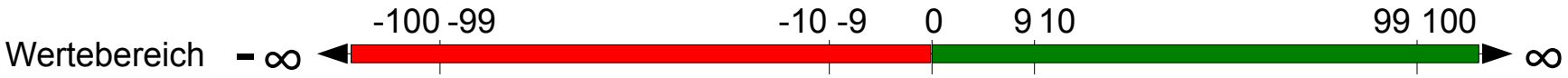
Zahlensysteme

Zahlensysteme

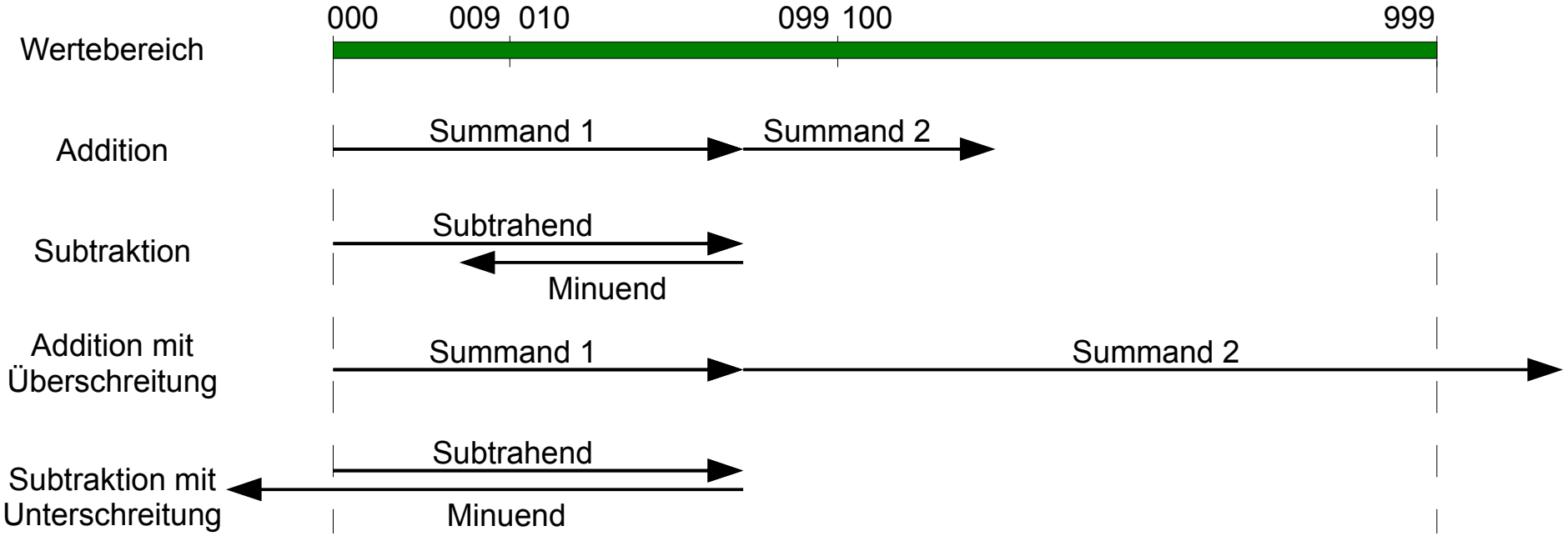
- Definitionen
  - **Ziffern** : Zeichen zur Darstellung von Zahlen
  - **Zahl** : Eine Folge von Ziffern
  - **Basis eines Zahlensystems** : Anzahl der unterschiedlichen Ziffern
- Moderne Zahlensysteme sind **positionale** Systeme
  - Die Position einer Ziffer innerhalb einer Zahl bestimmt den Beitrag, den diese Ziffer zum Wert der Zahl liefert.
- Dezimalsystem → Basis : **10**
  - Ziffern : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**
  - z.B.: dezimal 123 = $1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 3 * 10^0$
- Binärsystem → Basis : **2**
  - Ziffern : **0, 1** (binary digit → Bit)
  - z.B.: binär '1001' = $1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0$
- Hexadezimalsystem → Basis : **16**
  - Ziffern : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F**
  - z.B.: Hex-Zahl '1AF' = $1 * 16^2 + 10 * 16^1 + 15 * 16^0$
  - Verwandtschaft : 4 Bits ↔ 1 Hexziffer (Nibble)
  - (z.B.: binär '0011 1011' = hexadezimal '3B'

Dezimalsystem

Unser Dezimalsystem

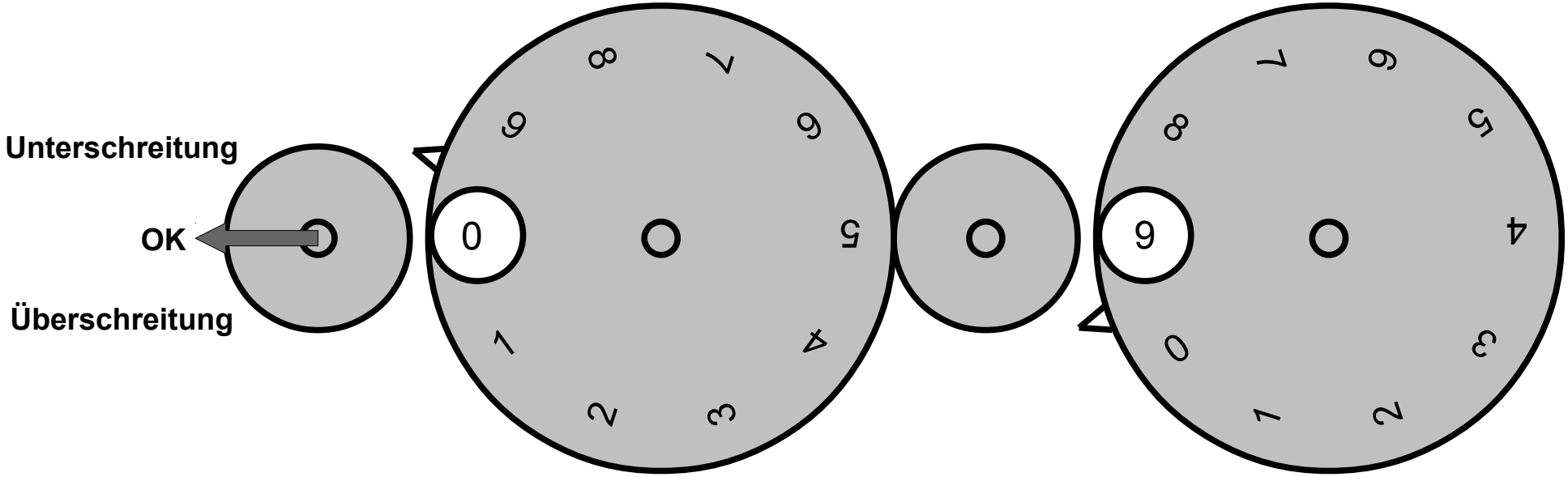


Leibniz-Rechner (nur positive Werte, z.B. 3-stellig)



- Die Beschränkung des Wertebereichs hat zur Folge, dass überprüft werden muss, ob bei einer Addition/Subtraktion der gültige Wertebereich verlassen wird.

Realisierung in einem mechanischen Rechner



- **Addition** : Drehen der Räder im Uhrzeigersinn
  - Übergang von 9 nach 0 erzeugt einen Übertrag (**Carry**)
- **Subtraktion** : Drehen der Räder entgegen dem Uhrzeigersinn
  - Übergang von 0 nach 9 erzeugt einen **Borrow**
- Ein Carry/Borrow aus einer Position muss an die nächst höhere Position weitergegeben werden, solange es noch eine höhere Position gibt.
  - z.B. Addition von 1 am rechten Rad der Abbildung.
- Ein Carry/Borrow aus der höchsten Position signalisiert eine Überschreitung bzw. Unterschreitung des Wertebereichs.
  - z.B. Subtraktion von 1 am linken Rad der Abbildung.

Negative Dezimalzahlen

Negative Zahlen in unserem Dezimalsystem

- Werden durch das **Vorzeichen** spezifiziert
- Erfordern ein 'kompliziertes' Subtraktionsverfahren

Minuend > Subtrahend !

```
  1 4 2
- 1 3 6
-------
- 0 0 6
```

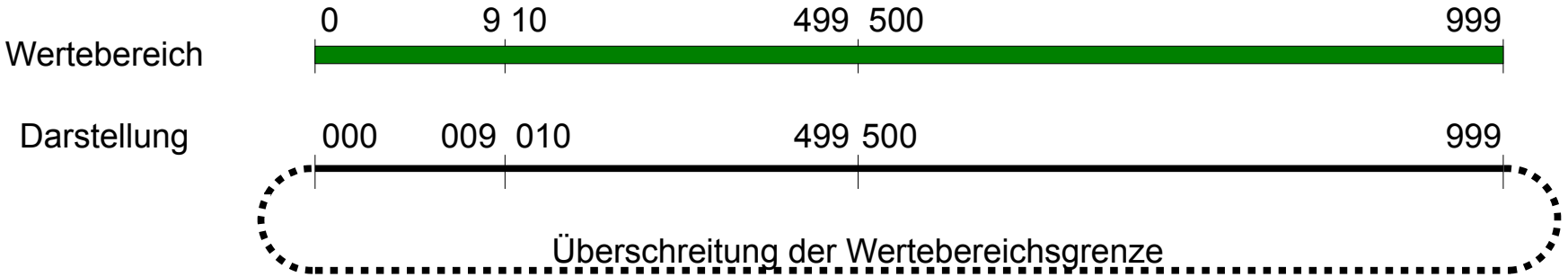
```
  1 3 6
- 1 4 2
```

Minuend < Subtrahend !

```
  1 4 2
- 1 3 6
-------
- 0 0 6
```

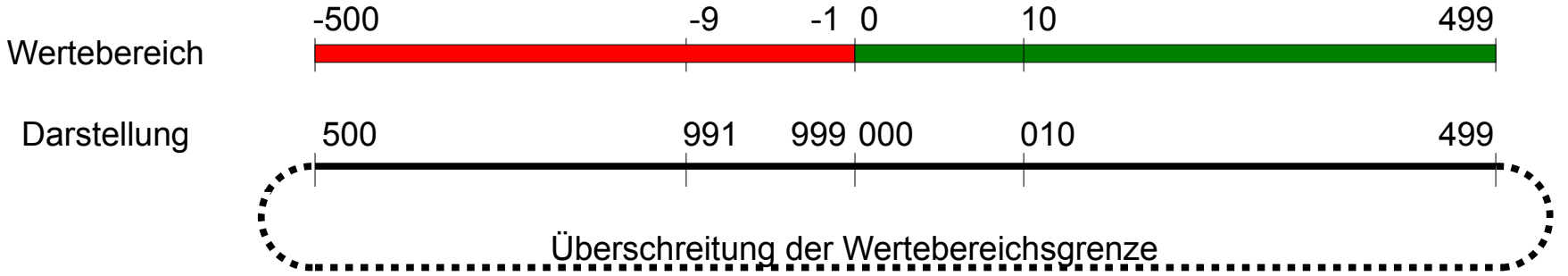
- Realisierung würde viele Schaltkreise erfordern

Negative Zahlen beim Leibniz-Rechner (nur theoretisch)



- Von den 1000 Werten des 3-stelligen Leibniz-Rechners werden 500 für negative Zahlen reserviert
- Die Darstellungen für die positiven Zahlen und die Zahl '0' sollten die selben sein wie bei den rein positiven Zahlen.
- Für Addition und Subtraktion sollte der selbe Mechanismus verwendet werden wie bei den rein positiven Zahlen.

0 0 0	9 9 9	9 9 8	500
- 1	- 1	- 4 9 8	- 1
9 9 9	9 9 8	5 0 0	4 9 9



- Die erste Ziffer einer Zahl ist 0 … 4 : positive Zahl (inkl. 0); die erste Ziffer ist 5 … 9 : negative Zahl

Negative Zahlen beim Leibniz-Rechner (Forts.)

- Der Übergang von '999' nach '000' bei einer Addition und der Übergang von '000' nach '999' bei einer Subtraktion stellt **kein** Verlassen des Wertebereichs dar.
  - Ein Carry oder Borrow signalisiert lediglich den Übergang von positiven zu negativen Zahlen und umgekehrt
- Der Übergang von '499' nach '500' bei einer Addition und der Übergang von '500' nach '499' bei einer Subtraktion stellt dagegen ein Verlassen des Wertebereichs dar.
  - Diese Übergänge werden als **Overflow** bezeichnet.
- Um sicher zu stellen, dass der gültige Wertebereich nicht verlassen wurde, überprüft man beim Rechnen mit
  - **rein positiven** Zahlen auf **Carry/Borrow**,
  - **gemischt positiven und negativen** Zahlen auf **Overflow**.

Berechnung des Betrags einer negativen Zahl N

- |N| = 1000 – N = 999 – N + 1 = (Neunerkomplement von N) + 1
- z.B.: |999| = 1000 – 999 =1; (000) + 1 = 1

Binär- und Hexadezimalsystem

- Informationsgehalt
  - 1 Bit : 2^1 = 2 Werte → JA – NEIN; Ein - Aus
  - 4 Bit : 2^4 = 16 Werte → Dezimalziffern (BCD Code)
  - 6 Bit : 2^6 = 64 Werte → Ziffern, Großbuchstaben, Sonderzeichen
  - 8 Bit : 2^8 = 256 Werte → alle Zeichen, auch nationale Sonderzeichen (ASCII, EBCDIC)

BYTE

- 1 Byte = 8 Bits = 2 Hexziffern
- **2^8 = 256** unterschiedliche Werte darstellbar
- Kleinste im Speicher adressierbare Informationseinheit (in der Regel)
- Verwendung
  - Zahlenwerte (z.B.: C unsigned char)
  - Zeichen (z.B.: ASCII-Code : 0x30 = '0', 0x31 = '1', 0x39 = '9', 0x41 = 'A', 0x61 = 'a' (siehe Tabelle im Script S.116))
  - Binärwerte (z.B.: Maschinencode)
- Bit Bezeichnungen (8051 Konvention)

  0000 0000B ... 1111 1111B = 0x00 ... 0xFF
  ↑ ↑ ↑ ↑
  Bit 7 Bit 0 2^7 ..... 2^0

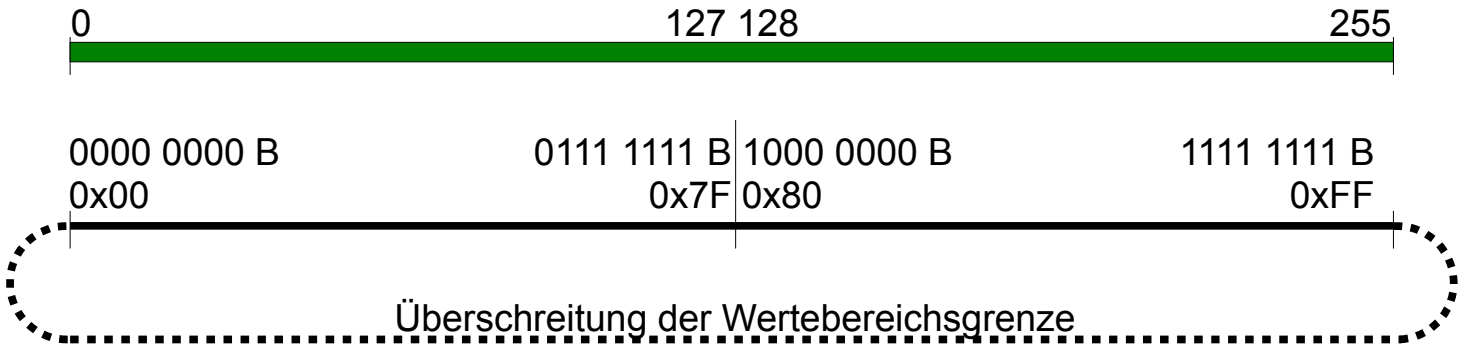
- Bit 7 : MSB = Most Significant Bit
- Bit 0 : LSB = Least Significant Bit

Schreibweise für Hexadezimalzahlen

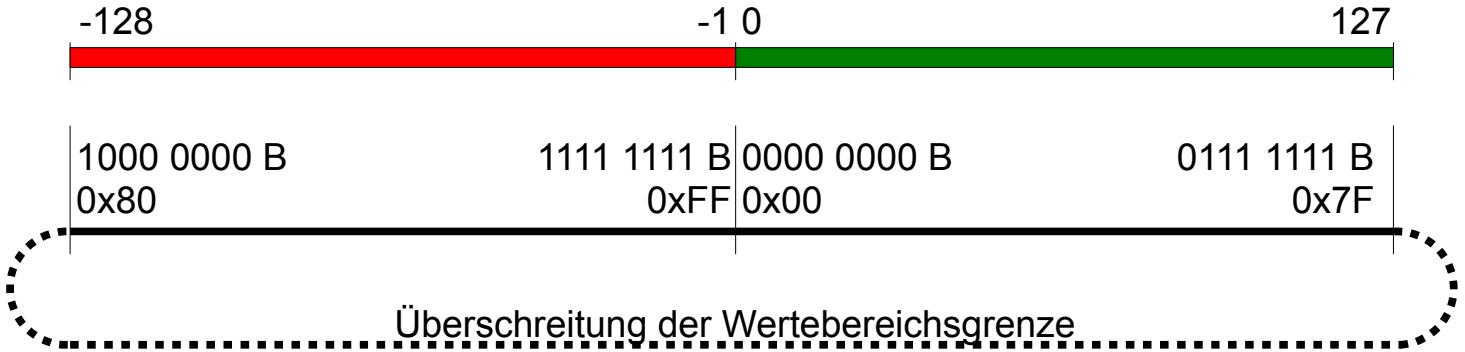
z.B.: Intel : 5AH, 0F6H; Motorola/Keil : 0x5A, 0xF6; IBM : X'5A', X'F6'; Borland : $5A, $0F6

Binärzahlen

Binärzahlen ohne Vorzeichen - 1 Byte
(Unsigned Binary – unsigned char)



Binärzahlen mit Vorzeichen - 1 Byte
(Signed Binary – signed char)



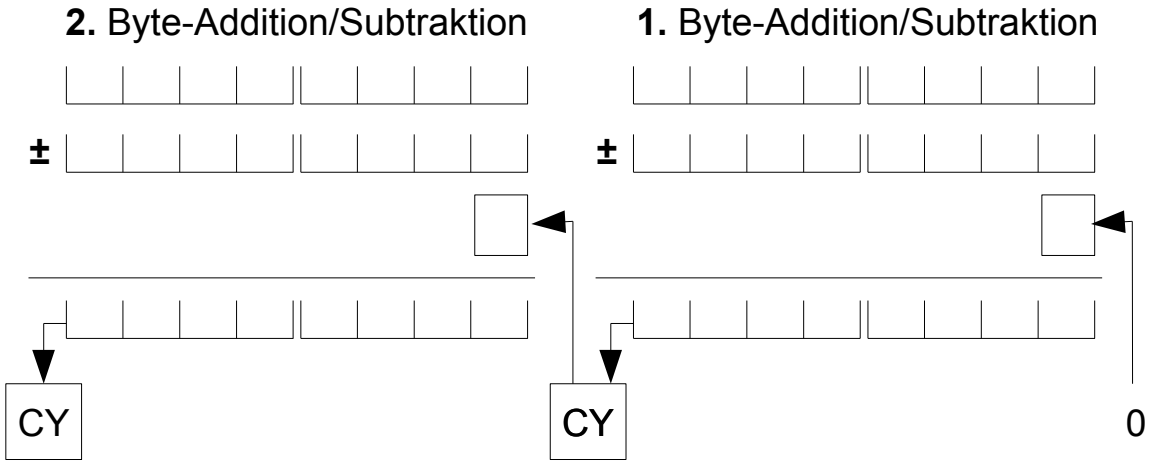
Erstes Bit einer Binärzahl = 0 → positive Zahl; erstes Bit einer Binärzahl = 1 → Negative Zahl

Binärzahlen (Forts.)

- Wie bei den Dezimalzahlen ergibt sich auch bei Binärzahlen ein Überschreiten des Wertebereichs, wenn
  - bei unsigned binary Zahlen ein Übergang zwischen 255 und 0 (0xFF ↔ 0x00) stattfindet,
    - und zwar ein Carry bzw. Borrow
  - bei signed binary Zahlen ein Übergang zwischen 127 und 128 (0x7F ↔ 0x80) stattfindet.
    - und zwar ein Overflow
- Der Prozessor registriert in einem einzigen Indikator, dem **Carry Flag (CY)**, ob ein Carry oder Borrow aufgetreten ist.
  - Der Programmierer kann Carry und Borrow unterscheiden, denn er weiß, ob zuvor eine Addition oder eine Subtraktion durchgeführt wurde.
- Dazu gibt es noch einen Indikator für Overflows, das **Overflow Flag (OV)**.
- Ein Prozessor führt Additionen und Subtraktionen für Unsigned Zahlen und Signed Zahlen in exakt gleicher Weise aus.
  - Er setzt ggf. das Carry Flag, als ob er Unsigned Zahlen verarbeiten würde.
  - Er setzt ggf. das Overflow Flag, als ob er Signed Zahlen verarbeiten würde
  - Da der Programmierer weiß, welcher Datentyp verarbeitet wurde, kann er durch Inspektion des Carry Flags und/oder des Overflow Flags überprüfen, ob der gültige Wertebereich überschritten wurde.

Binärzahlen (Forts.)

- Bei der Addition/Subtraktion von Zahlen, die aus **mehreren** Bytes bestehen, werden die Bytes einzeln von rechts nach links verarbeitet (von niederwertig nach höherwertig).
  - Bei jeder Byte Operation wird der sog. **Carry Out** Wert im Carry Flag gespeichert.
  - Am Beginn einer Operation wird der Wert des Carry Flags als **Carry In** in die Berechnung einbezogen.
  - Der Carry Out aus einer Byte Position wird so als Carry In in die nächst höhere Byte-Position übernommen.
  - Der Carry In für das niederwertigste Byte wird auf 0 forciert.
  - Nur die Werte des Carry Flags und des Overflow Flags aus der **höchsten** Position sind für die Gesamtoperation relevant.



- Bei der Addition/Subtraktion **jedes** einzelnen Bytes setzt der Prozessor sowohl das Carry Flag als auch das Overflow Flag auf 0 bzw 1.
- Ob ein gesetztes Carry Flag **oder** Overflow Flag aus der höchsten Position relevant ist, hängt davon ab, ob die Operation für Unsigned Zahlen oder **oder** Signed Zahlen durchgeführt wurde.

Overflow

- Ein Overflow tritt immer dann auf, wenn sich bei der Addition/Subtraktion der höchstwertigen Bytes ein Carry aus Bitposition 6 oder Bitposition 7, aber nicht aus beiden ergibt.

Carry aus Bitposition 7	Carry aus Bitposition 6	Overflow
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Bei einer vorzeichenbehafteten Binärzahl stellt das höchstwertige Bit das Vorzeichen dar.
- Die anderen Bits bestimmen den Wert der Zahl.
- Der Wert des Carry Indikators aus der Bitposition 6 des höchstwertigen Bytes unterscheidet, ob der gültige Wertebereich verlassen wurde.
  - Bei der Addition zweier positiver Zahlen bedeutet **ein Carry** aus Bitposition 6 einen Overflow, denn
  - Bit 7 der beiden Summanden = 0 → Summe dieser beiden Bits ergibt nie einen Carry.
  - Addition zweier negativer Zahlen entsprechend.
- Addition einer positiven und einer negativen Zahl erzeugt nie einen Overflow.
- Die nachfolgende Tabelle zeigt einige charakteristische Beispiele.

Binärzahlen (Forts.)

Operation	Ergebnis	$Carry_{Bit7}$	$Carry_{Bit6}$	Carry	Unsigned Zahlen	Overflow	Signed Zahlen
0x00 + 0x7F	0x7F	0	0	0	0 + 127 = 127	0	0 + 127 = 127
0x00 + 0x80	0x80	0	0	0	0 + 128 = 128	0	0 + (-128) = -128
0x00 + 0xFF	0xFF	0	0	0	0 + 255 = 255	0	0 + (-1) = -1
0x7F + 0x01	0x80	0	1	0	127 + 1 = 128	1	127 + 1 = [-128]
0x7F + 0x80	0xFF	0	0	0	127 + 128 = 255	0	127 + (-128) = -1
0x7F + 0x81	0x00	1	1	1	127 + 129 = [256]	0	127 + (-127) = 0
0x7F + 0xFF	0x7E	1	1	1	127 + 255 = [126]	0	127 + (-1) = 126
0xFF + 0xFF	0xFE	1	1	1	127 + 127 = [254]	0	(-1) + (-1) = -2
0x00 - 0x01	0xFF	1	1	0	0 – 1 = [-1]	0	0 – 1 = -1
0x80 - 0x01	0x7F	0	1	0	128 – 1 = 127	1	(-128) – 1 = [127]

- Bei Erweiterung des Wertebereiches (z.B. Casting von *char* nach *int*) werden
  - positive Zahlen links mit '0' erweitert,
  - negative Zahlen links mit '1' erweitert (z.B.: -128 = 1111 1111 1000 0000B)
- Umrechnung einer positiven Zahl in eine negative und umgekehrt :
  - |N| = 1 0000 0000 – N = 0 1111 1111 – N + 1 = (Einerkomplement von N) + 1
  - z.B.: |1111 1110| = 1 0000 0000 (0000 0001) + 0000 0001 = 0000 0010

```
  1 0000 0000
-   0 1111 1110
  ---------------
    0 0000 0010
```

Speicherformate

Für Informationseinheiten, die aus zwei Bytes (8051, ...) 4 By, 8 By (andere Architekturen) bestehen, gibt es zwei Formate für die Anordnung dieser Gruppe von Bytes im Speicher :

Beim 8051 Prozessor besteht ein Integerwert aus 16 Bits :

B15	B14	B13	B12	B11	B10	B9	B8	B7	B6	B5	B4	B3	B2	B1	B0

- **Big Endian** :
  - 'Das große Ende zuerst' :

B15	B14	B13	B12	B11	B10	B9	B8		B7	B6	B5	B4	B3	B2	B1	B0

  - Beispiel: Der Integerwert **0x1AB4** in Adresse 61 und 62

Speicheradresse	5F	60	61	62	63	64
			1A	**B4**		

  - Verwendung : Motorola 68000, PowerPC (zum Teil umschaltbar), KEIL C Compiler
- **Little Endian** :
  - 'Das kleine Ende zuerst' :

B7	B6	B5	B4	B3	B2	B1	B0		B15	B14	B13	B12	B11	B10	B9	B8

  - Beispiel: Der Integerwert **0x1AB4** in Adresse 61 und 62

Speicheradresse	5F	60	61	62	63	64
			B4	**1A**		

  - Verwendung : Intel, AMD (umschaltbar)

Wichtige Binärzahlen

dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7
binär	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
hexadezimal	0	1	2	3	4	5	6	7

dezimal	8	9	10	11	12	13	14	15
binär	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
hexadezimal	8	9	A	B	C	D	E	F

Wert	127	128	255	256	1k	4k	16k	64k
dezimal	127	128	255	256	1 024	4 096	16 384	65 536
hexadezimal	0x7F	0x80	0xFF	0x0100	0x0400	0x1000	0x4000	0x1 0000
Bereich		0x00 .... 0x7F		0x00 .... 0xFF	0x0000 .... 0x03FF	0x0000 .... 0x0FFF	0x0000 .... 0x3FFF	0x0000 .... 0xFFFF

Gebräuchliche Informationseinheiten

Bezeichnung		**Wertebereich**		
in 8051 Entwicklungsumgebung	**Bits**	**unsigned**	**signed**	**KEIL C Datentyp**
Byte	8	0 255	-128 ... +127	char
Wort	16	0 .... 64k-1	-32k ... +32k -1	int
(Doppelwort)	32	0 .... 4M-1	-2M ... +2M -1	

IT Größenangaben

Kilo	Mega	Giga	Tera	Peta	Exa
2^{10}	2^{20}	2^{30}	2^{40}	2^{50}	2^{60}
$1024^1 \approx 10^3$	$1024^2 \approx 10^6$	$1024^3 \approx 10^9$	$1024^4 \approx 10^{12}$	$1024^5 \approx 10^{15}$	$1024^6 \approx 10^{18}$

Beispiel: Umrechnung Anzahl Bits → Wertebereich

- Mit n Ziffern kann man Basis^n unterschiedliche Werte darstellen : 0, 1 …. Basis^n – 1; Anzahl = Basis^n = '1' || n Nullen
  - Beispiel : Dezimalsystem mit n = 2 : **Werte** = 00, 01, … , 99; **Anzahl** = 10^2 = 100
- Mathematische Basis : 1000 = $10^3 \approx 2^{10}$ = 1024 = 1k → $10^{3x} \approx 2^{10x}$
- Beispiel 1 : Anzahl = 2^{12} = 1 0000 0000 0000B (binäre '1' und 12 binäre Nullen)
  - 2^{12} By = 2^{2+10} By = $2^2 * 2^{10}$ By ≈ $2^2 * 10^3$ By = 4 kB
- Beispiel 2 : 4 GB = 4 * 10^9 By
  - 4 GB = 4 * 10^9 By = 4 * 10^3 * 10^3 * 10^3 By ≈ $2^2 * 2^{10} * 2^{10} * 2^{10}$ By = 2^{32} By

Gleitkommazahlen (I)

Dezimale Gleitkommazahl - *Beispiel* : + 123,456789 * **10** $^{+14}$

EVZ ↓

↑ VZ ↑ Mantisse ↑ Exponent

- Komma um eine Position nach links : Zahl wird um Faktor 10 kleiner.
- Exponent um 1 vergrößern : Zahl wird um Faktor 10 größer

Normierte Darstellung : + 0,123456789 * **10** $^{+17}$

Binäre Gleitkommazahl - *Beispiel* : + 1011,110010011 * **2** $^{-1010}$

↑

$1 * 2^{-1} = ½$

Gleitkommazahlen (II)

Umwandlung in Speicherformat

- *Beispiel* : $+1011{,}110010011 * 2^{-1010}$

1. Normierung der Mantisse : Verschieben des Kommas hinter die erste '1'.
   - *Beispiel* : $+1{,}011110010011 * 2^{-0111}$
   - '1' vor dem Komma muss nicht gespeichert werden (spart ein Bit)

2. Ermittlung der Charakteristik :

   $$\text{Charakteristik} = \text{Exponent} - \text{Exponent}_{min}$$

   $$\begin{array}{ccccc} \text{Exponent}_{min} & \leq & \text{Exponent} & \leq & \text{Exponent}_{max} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leq & \text{Charakteristik} & \leq & \text{Charakteristik}_{max} \end{array}$$

   - Nur positive Charakteristikwerte - vermeidet Vorzeichen für den Exponenten

	Exponent	8 Bit Charakteristik
Min	-128	0
	0	128
Max	+127	255

Gleitkommazahlen (III)

Darstellung im Speicher

- IEEE 754 Short Precision : **32** Bits

	VZ	Charakteristic	Nachkommastellen der Mantisse
	1	8	23 Bits
Beispiel :	0	0111 1001	0111 1001 0011 0000 0000 000

  - VZ = 0 : positive Gleitkommazahl
  - VZ = 1 : negative Gleitkommazahl

- IEEE 754 Double Precision : **64** Bits
  - Charakteristik : 11 Bits
  - Mantisse : 52 Bits

Binär codierte Dezimalzahlen - Binary Coded Decimal (BCD)

Ungepackte BCD-Zahlen (unpacked BCD)

- Die Dezimalziffern '0' ... '9' werden durch die binären Zahlen '0000 0000' bis '0000 1001' dargestellt.
  - Die Bitkombinationen '0000 1010' bis '1111 1111' sind ungültig.
- Pro Ziffer einer ungepackten Dezimalzahl wird also ein Byte benötigt.

Gepackte BCD-Zahlen (packed BCD)

- Die Dezimalziffern '0' ... '9' werden durch die binären Zahlen '0000' bis '1001' dargestellt.
- Bei **gepackten BCD Zahlen** (packed BCD) werden zwei Dezimalziffern in einem Byte gespeichert
  - Die erste Ziffer in Bits 7 ... 4,
  - Die zweite Ziffer in Bits 3 ... 0.
  - '0011 1000'B entspricht z.B. der dezimalen Zahl '38'.
  - Da ein Halbbyte 16 Werte annehmen kann, eine Dezimalziffer allerdings nur 10, gibt es 6 nicht verwendete Bitkombinationen
    - '1010'B ... '1111'B (0xA ... 0xF)
    - Sie werden auch **Pseudotetraden** genannt.